Émergence des modèles du concept de calculabilité

Serge Grigorieff

LIAFA, CNRS & Université Denis Diderot-Paris 7

Épistémologie et Histoire des Idées Mathématiques,

Paris, 11 mars 2015

(Séminaire Michel Serfati)

La problématique

Concept intuitif :

être calculable par un algorithme
$\equiv$ procédé *effectif*

- Cerner / formaliser mathématiquement
- Notion d'émulation
- Y a-t-il des incontournables ?

Sources de la problématique

Leibniz, 1684

Lingua Characteristica Universalis

(exprimer toute pensée)

Calculus Ratiocinator (en décider la vérité)

« Alors, il ne sera plus besoin entre deux philosophes
de discussions plus longues qu'entre deux comptables,
puisqu'il suffira qu'ils saisissent leur plume,
qu'ils s'asseyent à leur table de calcul
(en faisant appel, s'ils le souhaitent, à un ami)
et qu'ils se disent l'un à l'autre : "Calculons" »

L'Approche ingénierie

Modeste : { 1642, Pascaline (= additionneur)
1671, Machine à calculer de Leibniz (= les 4 opérations)

Plus ambitieux, Charles Babbage
1834-1864, Machine analytique

Inspirée du métier à tisser de Jacquard (1801)

Machine { dotée d'une mémoire
gérée par un programme d'instructions
Tout cela sur des cartes perforées

Programmation faite par Ada Lovelace

(fille de Lord Byron)

Lingua Characteristica
(pour les mathématiques)

Deux siècles après Leibniz

Begriffschrift (1879-1893)
Gottlob Frege

Une partie du calculable

. . . mais pas tout

Entscheidungsproblem (pb de la décision)

Avatar du Calculus ratiocinator

1921, Heinrich Behmann (Elève de Hilbert)

Algorithme de décision de la Logique monadique du 2d ordre avec égalité (combiner $x \in X$, $x = y$, $X = Y$ avec $\neg, \vee, \ldots, \exists, \forall$)

Étape remarquable | Lien avec la logique

. . . mais modeste

on sait juste exprimer qu'un ensemble a n éléments

« Nous sommes donc, malheureusement, encore bien loin de pouvoir confier la tâche de démontrer les propositions qu'on avance à une sorte de manœuvre mathématique, comme on le peut quand il s'agit d'exécuter un calcul numérique ».

Cette étape sera suivie de beaucoup d'autres :

Algèbre des réels, géométrie (Tarski 1929), . . .

1ère approche : définitions par récurrence

Récurrence "primitive"

$$\left|\begin{array}{rcl} f(\vec{x}, y+1) & = & h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \\ f(\vec{x}, 0) & = & g(\vec{x}) \end{array}\right.$$

Autres récurrences (Hilbert 1925,
Wilhelm Ackermann 1928, autre élève de Hilbert)

$$\left|\begin{array}{rcl} A(x+1, y+1) & = & A(x, A(x+1, y)) \\ A(0, y) & = & y+1 \\ A(x+1, 0) & = & A(x, 1) \end{array}\right.$$

A majore toute fonction récursive primitive

$$\left|\begin{array}{rcl} \varphi(i+1, x, y+1) & = & \varphi(i, x, \varphi(i+1, x, y)) \\ \varphi(0, x, y) & = & y+1 \\ \varphi(1, x, 0) & = & x \\ \varphi(2, x, 0) & = & 0 \\ \varphi(i+3, x, 0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Variante

$$\varphi_0(x, y) = y+1$$
$$\varphi_1(x, y) = x+y$$
$$\varphi_2(x, y) = xy$$
$$\varphi_3(x, y) = x^y$$
$$\varphi_4(x, y) = (\varphi_{3,x})^{(y)}(1) = x \uparrow\uparrow y$$

(tour d'exponentielles de x de hauteur y)

$$\varphi_{i+4}(x, y) = (\varphi_{i+3,x})^{(y)}(1) = x \uparrow^{(i+2)} y$$

1ère approche : définitions par récurrence

Récurrence double

(ce n'est pas une récurrence primitive)

$$\begin{aligned} \min(x+1, y+1) &= \min(x, y) + 1 \\ \min(0, y) &= 0 \\ \min(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Loïc Colson 1988 :

meilleur temps de calcul que toute récurrence simple

temps Récurrence double $= \min(x, y)$

temps TOUTE | combinaison de récurrences simples $\geq \alpha x$ ou $\geq \alpha y$

pour un certain α

Récurrence & fonctionnelles
(Hilbert 1925)

$$\boxed{\varphi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}}$$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(i+1,x,y+1) & = & \varphi(i,x,\varphi(i+1,x,y)) \\
& = & \varphi(i,x,\varphi(i,x,\ldots\varphi(i,x,\varphi(i,x,0)))) \qquad y+2 \text{ fois } \varphi(i,x,\ )
\end{array}$$

$$\begin{array}{rclrcl}
\varphi(0,x,y) & = & y+1 & \varphi(1,x,0) & = & x \\
\varphi(2,x,0) & = & 0 & \varphi(i+3,x,0) & = & 1
\end{array}$$

Peut être vue comme

$$\boxed{\varphi : \mathbb{N} \to (\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}) \qquad \varphi_i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}}$$

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(i+1)(x,y) & = & \varphi(i)^{(y+2)}(x,0) = \text{Iterate}(\varphi(i), y+2)(x,0) & \\
\varphi(0)(x,y) & = & y+1 & \\
\varphi(1)(x,0) & = & x & \text{Récurrence “primitive”} \\
\varphi(2)(x,0) & = & 0 & \text{mais d'ordre supérieur} \\
\varphi(i+3)(x,0) & = & 1 & \text{(et avec la fonctionnelle Iterate)}
\end{array}$$

Récurrence et fonctionnelles

Calcul du Minimum de deux entiers

$C : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\quad M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\quad \min : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
C(f)(0) &= 0 \\
C(f)(y+1) &= f(y)+1 \\
C(f) &\text{ est } f+1 \text{ sauf en } 0 \\
M(0) &= \text{fonction constante } 0 \\
M(x+1) &= C(M(x)) \\
\min(x,y) &= M(x)(y)
\end{aligned}
$$

Récurrence primitive d'ordre supérieur

même temps de calcul que la récurrence double

$$
\begin{aligned}
\min(x+1,y+1) &= \min(x,y)+1 \\
\min(0,y) &= 0 \\
\min(x,0) &= 0
\end{aligned}
$$

(Colson 1988)

la récurrence double n'est pas primitive récursive mais équivaut à une primitive récursive d'ordre supérieur

Le système T de Gödel, 1958

L'idée de Hilbert des récurrences primitives
avec aussi des fonctions en argument
est développée par Gödel 1958 en considérant
fonctions et fonctionnelles en arguments

On obtient ainsi
une suite strictement croissante $(T_n)_{N\in\mathbb{N}}$
d'ensembles de fonctions et fonctionnelles
dont les traces sur les seules fonctions est
également strictement croissante

Mais cela n'épuise pas le champ du calculable

Ackermann en math

(Hilbert 1925, Ackermann 1928)

$$\left|\begin{array}{rcl} A(x+1,y+1) & = & A(x,A(x+1,y)) \\ A(0,y) & = & y+1 \\ A(x+1,0) & = & A(x,1) \end{array}\right.$$

Toute gigantesque qu'elle soit la fonction d'Ackermann n'est pas tératologie de logiciens...

Tout idéal de polynômes à n variables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ est finiment engendré (Hilbert 1888)

Toute suite croissante d'idéaux $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \ldots$ est finie

Theorem. Si $\mathcal{I}_0$ engendré par monôme de degré d et $\mathcal{I}_{i+1}$ engendré par $\mathcal{I}_i$ + monôme de degré $d+i$

$$\boxed{\max(\text{taille d'une telle suite}) = A(n, d-1) - 1}$$

(Moreno-Saucías, 1991)

Modèles du calculable qui réussissent . . . sans convaincre

(1) Systèmes d'équations de Herbrand-Gödel, 1931-1934

Modèle esquissé par Jacques Herbrand 1931 de retour de Göttingen dans une lettre à Gödel et développé par Gödel 1934

Abstraction des notions de récurrence

Systèmes finis d'équations $s = t$ où s, t termes construits avec le zéro et la fonction successeur et des variables d'entiers et de fonctions

2 règles :(1) substituer partout $S^n(0)$ à une variable (2) si on a $s = t$ et $u = v$, échanger s et t dans certaines de leurs occurrences dans u ou v

Ce modèle donne TOUTES les fonctions calculables

mais a priori cela n'a rien d'intuitif

Gödel n'y croyait pas avant le travail de Turing 1936

Fonction 91 de John McCarthy (1970)

$$f(x) = \texttt{if } x > 100 \texttt{ then } x - 10 \texttt{ else } f(f(x+11))$$

$$f(x) = 91 \text{ si } x \leq 101$$

$$\begin{aligned} f(0) &= f(f(11)) \\ f(1) &= f(f(12)) \\ &\dots \\ f(100) &= f(f(111)) \\ f(x+101) &= x+91 \end{aligned}$$

Fonction d'Ikuo Takeuchi (1978)

$$t(x,y,z) = \text{if } x \leq y \text{ then } y \text{ else } t(t(x-1,y,z), t(y-1,z,x), t(z-1,x,y))$$

$$\begin{cases} t(x,x+y,z) = x+y \\ t(x+1,0,0) = t(\, t(x,0,0),\ t(0,0,x+1),\ t(0,x+1,0)\,) \\ t(x+1,0,z+1) = t(\, t(x,0,z+1),\ t(0,z+1,x+1),\ t(z,x+1,0)\,) \\ t((x+1)+(y+1),y+1,0) \\ \qquad = t(\, t(x+y+1,y+1,0),\ t(y,0,x+y+2), \\ \qquad\qquad t(0,x+y+2,y+1)\,) \\ t((x+1)+(y+1),y+1,z+1) \\ \qquad = t(\, t(x+y+1,y+1,z+1),\ t(y,z+1,x+y+2), \\ \qquad\qquad t(z,x+y+2,y+1)\,) \end{cases}$$

$$t(x,y,z) = \text{if } x \leq y \text{ then } y \text{ else if } y \leq z \text{ then } z \text{ else } x$$

Boucle WHILE en Herbrand-Gödel

$$
\begin{aligned}
\mathtt{Si}(0, y, z) &= y \\
\mathtt{Si}(x+1, y, z) &= z \\
\theta_f(x, t) &= \mathtt{Si}(f(x, t),\ t,\ \theta_f(x, t+1)) \\
\mu_f(x) &= \theta_f(x, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\theta_f(x, t) = \left| \begin{array}{l} \text{plus petit } y \geq t \text{ tel que } f(x, y) = 0 \\ \text{non définie s'il n'y a pas de tel } y \end{array} \right.
$$

$$
\mu_f(x, t) = \left| \begin{array}{l} \text{plus petit } y \text{ tel que } f(x, y) = 0 \\ \text{non définie s'il n'y a pas de tel } y \end{array} \right.
$$

(2) Modèle de Stephen Kleene 1936 avec récurrence et minimisation

Modèle de la programmation impérative

- on part des projections, du successeur et du zéro
- on clôt par composition, définition par récurrence et minimisation

On montre que ce modèle calcule les mêmes fonctions que le modèle de Herbrand-Gödel
Ce modèle donne TOUTES les fonctions calculables
mais cela n'a rien d'intuitif a priori

(3) Récurrences transfinies *(Hilbert 1925)*

Autre suggestion d'extension de la définition par récurrence

(Hilbert 1925)
$$\left| \begin{array}{rcl} f(\vec{x}, m) & = & g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y) & = & h(\vec{x}, y, T(\vec{x}, y)) \end{array} \right.$$

où
$$\left| \begin{array}{l} \preceq, g, h, T \text{ données} \\ \preceq \text{ bon ordre sur } \mathbb{N} \text{ de plus petit élément } m \\ \forall \vec{x} \quad T(\vec{x}, y) \prec y \end{array} \right.$$

Suggestion élucidée 30 ans après (John Myhill, 1953)

TOUTE fonction calculable est $f(2^x)$ avec une telle f où $\preceq, g, h, T$ primitifs récursifs, $\preceq$ isomorphe à $\leq$

- $+$: Cette récurrence étendue donne bien tout
- $-$: Mais pas de hiérarchie selon les ordinaux
  c'est le brassage de $\mathbb{N}$ qui compte, pas le transfini

(4) Représentation dans une théorie $\mathcal{A}$

(Gödel 1931-1934, Raphael Robinson 1950)

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ représentable dans $\mathcal{A}$

$$f(a_1, \ldots, a_k) = b$$
$$\iff \mathcal{A} \vdash \forall y \, (F(\ulcorner a_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_k \urcorner, y) \Leftrightarrow y = \ulcorner b \urcorner)$$

On représente exactement les fonctions calculables

si $\mathcal{A}$ | récursivement axiomatisable
consistante et au moins aussi forte que Q

Q

$$\begin{array}{rcl} x + 0 & = & x \\ x + Sy & = & S(x + y) \\ x\,0 & = & 0 \\ x\,(Sy) & = & x\,y + x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Sx = Sy & \Rightarrow & x = y \\ Sx & \neq & 0 \\ x \neq 0 & \Rightarrow & \exists y \; x = Sy \end{array}$$

Q ne prouve même pas la commutativité de $+$ et $\times$

(5) Logique combinatoire *(Schönfinkel 1920-24)*

Encore l'école de Hilbert à Göttingen

Moisei Schönfinkel grand méconnu de la calculabilité

Monde des combinateurs ($\approx$ fonctions unaires)

- Toute fonction est unaire : $f(x,y)$ est vue comme $x \mapsto (y \mapsto f(x,y))$ (Curryfication)
- Application libre (sauvage...)

  uv, vu soit $u(v)$ et $v(u)$ uu, $(uv)u$, $u(vu)$,...
- Combinateurs de base K, S et des variables
- Deux règles

$$\begin{array}{rcl} (Ku)v & \triangleright & u \\ ((Su)v)w & \triangleright & (uw)(vw) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (x,y) \mapsto x \\ (f,g,z) \mapsto f(z,g(z)) \end{array}$$

Convention d'association à gauche :

$K\alpha\beta$ est $(K\alpha)\beta$ $\quad$ $S\alpha\beta\gamma$ est $((S\alpha)\beta)\gamma$

$$\begin{array}{rcl} K\alpha\beta & \triangleright & \alpha \\ S\alpha\beta\gamma & \triangleright & \alpha\gamma(\beta\gamma) \end{array} \qquad \begin{array}{c} (x,y) \mapsto x \\ (f,g,z) \mapsto f(z,g(z)) \end{array}$$

$I = SKK \quad x \mapsto x \qquad B = S(KS)K \quad (f,g,x) \mapsto f(g(x))$

$$Iw = SKKw \triangleright Kw(Kw) \triangleright w$$

$$\begin{aligned} Buvw = S(KS)Kuvw &\triangleright KSu(Ku)vw = KSu(Ku)vw \\ &\triangleright S(Ku)vw \triangleright Kuw(vw) = Kuw(vw) \triangleright u(vw) \end{aligned}$$

Code de l'entier n
= itérateur "n fois"
(à la Church)

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner 0 \urcorner & = & KI \\ \ulcorner n+1 \urcorner & = & SB\ulcorner n \urcorner \end{array}$$

$\ulcorner n \urcorner f$ "est" la fonction $x \mapsto f^{(n)}(x)$

$$\begin{aligned} \ulcorner 0 \urcorner uv &= Kluv = Kluv \triangleright Iv \triangleright v \\ \ulcorner n+1 \urcorner uv &= SB\ulcorner n \urcorner uv = SB\ulcorner n \urcorner uv \\ &\triangleright Bu(\ulcorner n \urcorner u)v \triangleright u\big(\ulcorner n \urcorner uv\big) = u(u^{(n)}(v)) = u^{(n+1)}(v) \end{aligned}$$

Toute fonction calculable peut l'être par un terme *(Kleene, Turing 1936)*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} K\alpha\beta & \triangleright & \alpha & \ulcorner 0 \urcorner & = & KI \\ S\alpha\beta\gamma & \triangleright & \alpha\gamma(\alpha\beta) & \ulcorner n+1 \urcorner & = & (SB)\ulcorner n \urcorner \\ B\alpha\beta\gamma & \triangleright & \alpha(\beta\gamma) & \ulcorner n \urcorner fx & \triangleright & f^{(n)}x = f(f(\cdots(fx)\cdots)) \end{array}$$

- SB représente la fonction successeur
- $BS(BB)$ représente la fonction addition

  $BS(BB)\ulcorner n \urcorner \ulcorner p \urcorner fx \triangleright S(BB\ulcorner n \urcorner)\ulcorner p \urcorner fx = S(BB\ulcorner n \urcorner)\ulcorner p \urcorner fx$
  $\triangleright BB\ulcorner n \urcorner f(\ulcorner p \urcorner f)x = BB\ulcorner n \urcorner f(\ulcorner p \urcorner f)x \triangleright B(\ulcorner n \urcorner f)(\ulcorner p \urcorner f)x$
  $\triangleright \ulcorner n \urcorner f(\ulcorner p \urcorner fx) \triangleright \ulcorner n \urcorner f(f^p x) \triangleright f^n(f^p x) = f^{n+p}x$
- B représente la fonction multiplication

  $B\ulcorner n \urcorner \ulcorner p \urcorner fx \triangleright \ulcorner n \urcorner(\ulcorner p \urcorner f)x \triangleright (\ulcorner p \urcorner f)^{(n)}x$
  $= \ulcorner p \urcorner f\ (\ulcorner p \urcorner f\ (\cdots(\ulcorner p \urcorner f\ (\ulcorner p \urcorner f\ \ (\ulcorner p \urcorner fx)\ ))\cdots))$
  $\triangleright \ulcorner p \urcorner f\ (\ulcorner p \urcorner f\ (\cdots(\ulcorner p \urcorner f\ (\ulcorner p \urcorner f\ \ (f^{(p)}x)\ ))\cdots))$
  $\triangleright \ulcorner p \urcorner f\ (\ulcorner p \urcorner f\ (\cdots(\ulcorner p \urcorner f\ (f^{(2p)}x)\ )\cdots))$
  $\triangleright \ulcorner p \urcorner f\ (\ulcorner p \urcorner f\ (\cdots(f^{(3p)}x)))\cdots)) \cdots \triangleright f^{(np)}x$

Toute fonction calculable peut l'être par un terme *(Kleene, Turing 1936)*

Clé de la preuve de
l'équivalence avec les autres modèles :
combinateur Θ de point fixe (Haskell Curry, Turing 1937)

$$\forall u \qquad \Theta u \ \triangleright \ u(\Theta u)$$

Résultat assez technique : un exemple est

$$\Theta = W(B(BW(BT)))(W(B(BW(BT))))$$

où

$$\begin{cases} I = SKK & T = B(SI)K \\ B = S(KS)K & W = B(T(BBT))(BBT)SI \end{cases}$$

(6) Lambda calcul *(Church 1934)*

Développé par Alonzo Church au retour de Göttingen chez Hilbert, 1929, où Curry développait les idées de Schönfinkel

- Idées de Schönfinkel conservées :
  "Tout est fonction", tout s'applique à tout
- Plus définition de fonction (abstraction) : $\lambda x\,.\,u$
- Combinateurs K et S omis car définissables :

$$\lambda x\,\lambda y\,.\,x \qquad \lambda x\,\lambda y\,\lambda z\,.\,(xz)(yz)$$

- Une seule règle ((beta réduction)

$$(\lambda x\,.\,u)v \;\triangleright\; u[v/x]$$

On y code les entiers : $\ulcorner n \urcorner = \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n x$

On y représente TOUTES les fonction calculables

Lambda calcul ≡ Logique combinatoire

Modèles du calculable par implémentation

. . . qui réussissent et convainquent

(7) Machines de Turing *(Turing 1936)*

- Turing à la fois ingénieur, cogniticien et mathématicien
- Décortique finement ce que fait un être humain pour effectuer un processus algorithmique,
- C'est ce travail qui convainquit Gödel
- (Gandy 2001) : l'approche de Turing convainc car c'est une implémentation. Les autres (Herbrand-Gödel, Church, Kleene) sont des spécifications dont rien ne dit a priori qu'elles soient exhaustives.

Turing fonde la théorie de la calculabilité

- Machine universelle

  Résultat principal de la théorie de Turing selon von Neumann 1948

  « We might expect a priori that this is impossible. How can there be an automaton which is at least as effective as any conceivable automaton, including, for example, one of twice its size and complexity ?

  Turing, nevertheless, proved that this is possible ».

- Recherche des petites machines universelles
- Indécidabilité de l'arrêt et de théories logiques
- Analyse récursive

Machines de Turing revues par Post 1936

10 ans avant Turing, Emil Post avait construit un modèle proche de celui de Turing, plus lisse en fait (c'est le modèle retenu aujourd'hui sous le nom "machine de Turing")

Mais

- pas l'analyse fine de Turing sur les processus de calcul
- pas de théorie de la calculabilité
- pas l'extension aux objets infinis (les réels)

- ...et Post n'a pas publié son travail

(8) Systèmes de réécriture

Post 1947, Andrei A. Markov 1951

Transition $(q, b) \to (r, b', +1)$ d'une mach. de Turing

$\equiv$ vue en réécriture

t	$\ldots$	a	b	q	c	d	$\ldots$
$t+1$	$\ldots$	a	b'	c	r	d	$\ldots$

Etat inséré à droite de la lettre lue

- Markov oublie l'état de la machine de Turing
- remplace la fonction de transition par une liste de règles de réécriture $u \to v$ (u, v des mots)
- Transition = remplacer dans le mot une occurrence du motif u par le motif v
  D'où insertion ou suppression de quelques cases
  Le ruban a une géométrie dynamique

Réécriture $\equiv$ Machines de Turing

(9) Machines de Kolmogorov

Kolmogorov 1953, K. & Uspensky 1958

- Le ruban linéaire $\mathbb{Z}$ ou plan $\mathbb{Z}^2$ ou...

  devient protéiforme

  - graphe fini non orienté
  - avec étiquetage des sommets et arêtes
  - et degré du graphe borné

    (nombre maxi d'arêtes sur un sommet)

  Kolmogorov libère le ruban

- sommet distingué qui peut bouger de place

Mach. de Kolmogorov $\equiv$ Mach. de Turing

(10) Storage Modification Machines

Arnold Schönhage 1970

- Le graphe devient orienté de degré sortant borné
- Degré entrant arbitraire
  comme pour les pointeurs en programmation

Mach. de Schönage $\equiv$ Mach. de Turing

Thèse de Church-Turing

- **Thèse de Church-Turing.** *Toute fonction effectivement calculable est récursive.*
- Turing 1936 "démontre" la thèse de Church-Turing à partir d'hypothèses sur la nature du calcul

- **Thèse physique de Church-Turing.** *Toute fonction calculable par un système physique déterministe est récursive.*
- Gandy (unique élève de Turing) 1980 "démontre" la thèse de Church-Turing physique à partir d'hypothèses sur la nature de l'univers

Thèse de Galilée (1623).

L'univers est écrit en langage mathématique

Thèse Ch.-Turing physique $\Rightarrow$ *Thèse Galilée* (Dowek 2012)

« La philosophie est écrite dans ce grand livre continuellement ouvert, là, sous nos yeux (je veux dire l'univers), mais qu'on ne peut comprendre sauf à d'abord en entendre la langue, en connaître l'alphabet dans lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et les lettres de son alphabet sont triangles, cercles et autres figures géométriques sans la connaissance desquels il est humainement impossible de comprendre un seul mot ; sans eux on erre vainement dans un obscur labyrinthe. »

« La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola ; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto »

La succession des modèles qui réussissent

1920 Logique combinatoire de Moisei Schönfinkel
développée vers 1928 par Haskell Curry

1925 Récurrences avec un bon ordre (Hilbert)
Elucidé en 1953 par John Myhill

1931 Représentation en arithmétique (Gödel puis. . .)

1931 Equations de Herbrand-Gödel (Publié 1934 par Gödel)

1932 Lambda calcul (Church)

1936 Machines de Turing LE MODÈLE QUI CONVAINC

1936 Récurrence + minimisation (Kleene)

1947-1951 Systèmes de réécriture (Post, Markov)

1953-1958 Machines de Kolmogorov

1970 Storage Modification Machines d'Arnold Schönhage

Bibliographie

Anthologie de la calculabilité
Naissance et développements de la théorie de la calculabilité des années 1920 à 1970

éditeurs Michel Bourdeau & Jean Mosconi
à paraître chez Cassini

Ce livre contient les traductions en français de 24 articles essentiels sur le sujet, avec présentation détaillée de chacun des articles et une introduction générale à l'ensemble